Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu bat eta laurden

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}$

(1.5 puntu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{L}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}$$

(*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ serie geometrikoa da, $r=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2.- $a_n = \dfrac{5^n}{5n^3 + b^n + (\mathrm{L}n)^{10}}$ **,** $\forall b > 0$ **, gai orokorra emanik:**

a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **.**

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **seriearen izaera.**

(3 puntu)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} \infty & \forall b > 1 \\ 0 & \forall b < 1 \\ 1 & b = 1 \end{cases}$, orduan:

$$\forall b \le 1 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5n^3} = \infty$$

$$\forall b > 1 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{b}\right)^n = \begin{cases} \infty & \forall b < 5 \\ 0 & \forall b > 5 \\ 1 & b = 5 \end{cases}$$

Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \forall b < 5 \\ 0 & \forall b > 5 \\ 1 & b = 5 \end{cases}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen izaera aztertzen hasteko, aurreko atalean lortutako emaitzaz baliatuko gara, BB aztertu baitugu.

Honela, $\forall b \le 5 \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea dela dugu ($a_n > 0 \ \forall n$ beraz, ezin bada konbergentea izan, dibergentea da).

Eta, $\forall b > 5 \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ denez, ikasketarekin jarraituko dugu. Kasu honetan:

$a_n = \dfrac{5^n}{5n^3 + b^n + (\mathrm{L}n)^{10}} \sim \dfrac{5^n}{b^n} = \left(\dfrac{5}{b}\right)^n$ eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{b}\right)^n$ serie geometrikoa da, $r = \dfrac{5}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{b}\right)^n$ konbergentea da. Orduan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da.

Beraz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konbergentea da } \forall b > 5 \\ \text{dibergentea da } \forall b \le 5 \end{cases}$

3.- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ **berretura-seriezko garapena ezagutzen da.**

a) Lortu $f^{17)}(0)$-ren balioa.

b) Zehaztu zenbat gai batu behar dugun $f(1)$-ren balio hurbildua lortzeko, errorea 0.01 baino txikiagoa izanik.

(2.5 puntu)

a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ f funtzioaren berretura-seriezko garapena denez, eta, garapen hori bakarra dela jakinda, Taylor-en serie da. Beraz, x^{17} batugaiaren koefizientean $f^{17)}(0)$ agertuko da. Honela:

$$17=2n+1 \quad \Leftrightarrow \quad n=8 \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{17)}(0)}{17!}\cdot x^{17}=\frac{(-1)^8}{17!}\cdot x^{17} \quad \Leftrightarrow \quad f^{17)}(0)=1$$

b) Aurreko garapenean $x=1$ ordezkatuz gero, $f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ emaitza lortzen dugu. Serie ha alternatua da, eta, Leibniz-en teorema egiaztatzen du:

i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=0$

ii) $|a_n|=\frac{1}{(2n+1)!}>|a_{n+1}|=\frac{1}{(2n+3)!}$

Beraz, $\exists S=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ eta $|S-S_n|<|a_{n+1}|=\frac{1}{(2n+3)!}$

Ariketak $|S-S_n|<0.01$ izatea eskatzen duenez, $|S-S_n|<|a_{n+1}|=\frac{1}{(2n+3)!}\le 0.01$ noiz egiaztatzen den aztertuko dugu:

$$\frac{1}{(2n+3)!}\le 0.01=\frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad (2n+3)!\ge 100$$

$n=0 \quad \Rightarrow \quad 3!=6<100$

$n=1 \quad \Rightarrow \quad 5!=120>100$

Beraz, bi batugai (batukaria 0tik hasten baita) batu beharko genituzte:

$$f(1)\simeq\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6} \qquad \text{eta} \qquad \left|f(1)-\frac{5}{6}\right|<0.01$$

4.- $f(x)=\arctan(3x)$ **funtzioa emanik, lortu bere berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.**

(3 puntu)

$$f'(x)=\frac{3}{1+9x^2}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}3\left(-9x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 3^{2n+1}\cdot x^{2n}\qquad \forall x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

(*) $f'(x)=\dfrac{3}{1+9x^2}$ serie geometrikoaren batura da:

$$r=-9x^2\quad\Rightarrow\quad \text{konbergentea da}\quad\Leftrightarrow\quad |r|=9x^2<1\quad\Leftrightarrow\quad |x|<\frac{1}{3}$$

Emaitza hori integratuz:

$$f(x)=\arctan(3x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 3^{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+k\overset{(**)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 3^{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad \forall x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

(**) $f(0)=\arctan(0)=0=0+k\quad\Leftrightarrow\quad k=0$

Orain, tarteko mugak aztertuko ditugu:

$$x=-\frac{1}{3}\ \text{puntuan}\begin{cases}\exists f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}\ \text{eta funtzio jarraitua da}\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\ \text{konbergentea da (Leibniz)}\quad\Rightarrow\quad \exists S\ \text{funtzio jarraitua}\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{3}\ \text{puntuan}\begin{cases}\exists f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}\ \text{eta funtzio jarraitua da}\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}\ \text{konbergentea da (Leibniz)}\quad\Rightarrow\quad \exists S\ \text{funtzio jarraitua}\end{cases}$$

Beraz, $f(x)=\arctan(3x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^{2n+1}}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\qquad \forall x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$